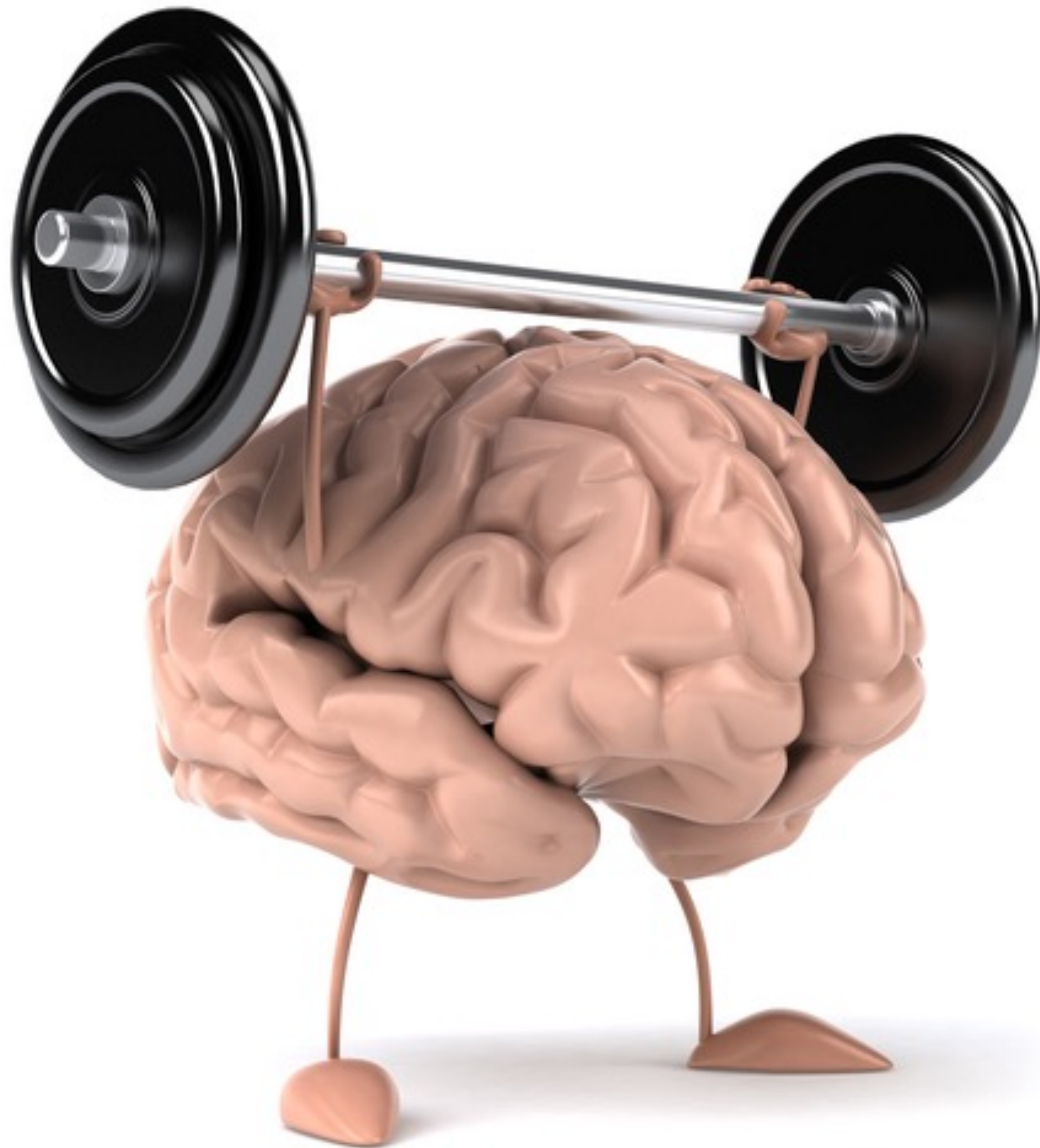


Révision

Examen partiel



MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée

Stratégies avant l'examen

- Dans les jours précédant l'examen :
 - DORMIR
 - Étude :
 - devoirs, exercices faits en classe
 - examens des années précédentes — **ATTENTION!**
 - révision des notes de cours pour les modules plus difficiles
 - objectifs du cours (sur le site web)
- Dans les heures précédant l'examen :
 - Alimentation adéquate (attention au *sugar crash*)
 - Économisez votre énergie intellectuelle
 - Détente

Stratégies durant l'examen

- **Avant** de commencer :
 - Survoler l'examen et classer les questions selon leur difficulté/temps
- **Après** avoir commencé :
 - Commencer par les questions les plus faciles !
 - Bloqué.e ? Sauter la question et prenez note d'y revenir
 - Faites comme Dwight : respirez !



Stratégies après l'examen

PUE
UNIVERSITAIRE

- LA LÉGENDE EST ÉTERNELLE -

Combinaison linéaire de deux vecteurs

- soit un ensemble de 2 vecteurs :

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

et un ensemble de 2 scalaires :

$$\{c_1, c_2\}$$

- $\mathbf{y}$ est une combinaison linéaire :

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

Seules opérations permises pour une combinaison linéaire :

- 1) multiplier par un scalaire
- 2) additionner

Définition : produit scalaire

- opération algébrique entre 2 vecteurs :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- le produit scalaire entre ces vecteurs est donné par :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Le résultat est un **scalaire**.

Utile pour calculer : la **norme**, un vecteur **unitaire**, la **distance** et l'**angle** entre 2 vecteurs, la **projection**.

Gauss-Jordan : algorithme

1. Trouver la colonne non-nulle la plus à gauche
 - a. C'est une colonne **pivot**, la position pivot est en haut de la colonne
 - b. Il faut parfois intervertir des lignes
2. Appliquer les opérations élémentaires sur les lignes pour que les éléments sous le pivot soient nuls
3. En ignorant la ligne contenant le pivot (et toutes celles au-dessus)
 - a. Répéter les étapes 1. et 2. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de lignes non-nulles
4. Appliquer les opérations élémentaires sur les lignes pour que les éléments au-dessus des pivots soient nuls
 - a. Diviser chaque ligne par la valeur du pivot s'il n'est pas égal à 1

Élimination de Gauss

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Matrice échelon

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Matrice échelon réduite

Rang d'une matrice

Ou encore :
 $\text{rang}(A) = \text{nombre de pivots !}$

- Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non-nulles de la matrice échelon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Théorème du rang :
 - Nombre de variables libres = nombre de variables (colonnes) - $\text{rang}(A)$

Forme paramétrique des solutions

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + s - 2t \\ s \\ 1 + 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Questions :
 - quel est le sous-espace engendré par la solution ?
 - quelle est la solution particulière ?

Méthodes itératives

- Construire une suite de vecteurs $\mathbf{x}^{(k)}$ qui converge vers la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$$

- Avantages par rapport aux méthodes directes :
 - plus simples à programmer
 - nécessitent moins de mémoire
 - peuvent être moins gourmandes en temps de calcul (surtout pour des gros systèmes)
 - meilleur contrôle sur la précision

Méthode itérative de Jacobi

- Déterminer un point de départ

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

- Itérer !

$$x_1^{(1)} =$$

$$x_2^{(1)} =$$

$$x_3^{(1)} =$$

$$x_1 = \frac{1}{9}(10 - x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{10}(19 - 2x_1 - 3x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{11}(-3x_1 - 4x_2)$$

solution exacte : $\mathbf{x} = (1 \quad 2 \quad -1)$

Méthode itérative de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{9}(10 - x_2 - x_3) \\x_2 &= \frac{1}{10}(19 - 2x_1 - 3x_3) \\x_3 &= \frac{1}{11}(-3x_1 - 4x_2)\end{aligned}$$

- Déterminer un point de départ

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

- Itérer !

$$x_1^{(1)} =$$

$$x_2^{(1)} =$$

$$x_3^{(1)} =$$

solution exacte : $\mathbf{x} = (1 \quad 2 \quad -1)$

Multiplication matricielle en 4 temps

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & & \mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ \left[\right. & & \left. \right] & \left[\right. & & \left. \right] = \left[\right. & & \left. \right] \end{matrix}$$

Ligne x colonne : $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & & \mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ \left[\right. & & \left. \right] & \left[\right. & & \left. \right] = \left[\right. & & \left. \right] \end{matrix}$$

Par colonnes (de $\mathbf{B}$) : $\text{col}_k(\mathbf{C}) = \mathbf{A} \text{col}_k(\mathbf{B})$

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & & \mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ \left[\right. & & \left. \right] & \left[\right. & & \left. \right] = \left[\right. & & \left. \right] \end{matrix}$$

Colonne x ligne : $\mathbf{C} = \sum_{k=1}^n \text{col}_k(\mathbf{A}) \text{ligne}_k(\mathbf{B})$

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & & \mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ \left[\right. & & \left. \right] & \left[\right. & & \left. \right] = \left[\right. & & \left. \right] \end{matrix}$$

Par lignes (de $\mathbf{A}$) : $\text{ligne}_l(\mathbf{C}) = \text{ligne}_l(\mathbf{A}) \mathbf{B}$

Particularités de la multiplication matricielle

- En général, la multiplication matricielle n'est pas commutative

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- En général :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \text{ n'implique pas } \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

- En général :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \text{ n'implique pas que } \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Puissance d'une matrice

- Pour une matrice **carrée** :

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}$$

Calculer l'inverse d'une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \stackrel{\text{Rappel}}{=} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Vérifier !

Équivalent à résoudre 2
systèmes d'équations linéaires
à la fois !

Comment résoudre pour un ***b*** ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Factorisation $P^T LU$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Sous-espaces d'une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Espace des lignes

Espace des colonnes

Espace nul

Théorème de l'inversibilité, revisité

- Pour une matrice $\mathbf{A}$ de dimension $n \times n$, les énoncés suivants sont équivalents :
 - elle est inversible ;
 - l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ne possède que la solution triviale ;
 - l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique pour chaque $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;
 - sa forme échelon réduite est $\mathbf{I}$;
 - $\mathbf{A}$ est un produit de matrices élémentaires ;
 - $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$
 - les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes ;
 - les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^n$;
 - les colonnes de $\mathbf{A}$ forment une base pour $\mathbb{R}^n$;
 - on peut dire la même chose pour ses lignes !

Transformation linéaire

- Une transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est **linéaire** si et seulement si :

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$$

Comment trouver **A** ?

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$T : \mathbb{R}^? \rightarrow \mathbb{R}^?$$

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Chaîne de Markov

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ b_n \end{bmatrix}$$